

**António Carlos Semedo Tavares**

**ACTIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO  
NA AULA DE MATEMÁTICA**

**Uma experiência com os alunos de uma turma do  
8º ano do liceu Amílcar Cabral - Assomada**

**Licenciatura em Ensino de Matemática**

**I.S.E. 2008**



**António Carlos Semedo Tavares**

# **ACTIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO NA AULA DE MATEMÁTICA**

**Uma experiência com os alunos de uma turma do 8º ano do  
Liceu Amílcar Cabral – Assomada**

Trabalho científico apresentado ao ISE para obtenção do grau de licenciado em Ensino de  
Matemática, sob a orientação do Mestre José Moniz Lopes Fernandes.

**I.S.E. 2008**



## **Departamento de Ciência e Tecnologia**

**Trabalho de fim de curso:**

**Actividade de Investigação na aula de Matemática**

**Uma experiência com os alunos de uma turma do 8º ano do liceu**

**Amílcar Cabral – Assomada**

**O Júri**

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Praia, aos \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2008

## **Agradecimentos**

Aos alunos que permitiram a realização do estudo e a recolha de dados.

Ao meu orientador Mestre José Moniz pelo interesse e grande apoio, pelas sugestões e críticas pertinentes e pelo estímulo que sempre me proporcionou.

Ao João Felisberto pela partilha constante, que sem a qual não seria possível a realização deste trabalho.

À minha família.

Aos meus colegas e amigos pelo apoio e coragem que me foram transmitindo.

Ao Marcos, a quem dedico este trabalho, pela alegria de o ter como filho.

## ÍNDICE

### Introdução

Contextualização -----	1
Enquadramento do estudo -----	1
Objectivos-----	2
Estrutura do trabalho -----	2

### Capítulo I - Fundamentação teórica

Conceitos -----	4
Actividades de investigação e as orientações curriculares-----	5
Formação matemática do aluno-----	6
Etapas do trabalho investigativo -----	8
Papel do professor -----	9
Desafiar os alunos -----	10
Avaliar o progresso dos alunos -----	11
Raciocinar matematicamente -----	11
Apoiar o trabalho dos alunos -----	11
Fornecer e recordar informações -----	12
Promover a reflexão dos alunos -----	12
Papel dos alunos -----	13

### Capítulo II - Aspectos da formação matemática

A matemática e a actividade matemática-----	14
Os problemas e a evolução da matemática -----	14
A resolução de problemas e as investigações -----	15
A aula de investigação -----	17
A preparação de aulas de investigação -----	20

Reflectir sobre o trabalho realizado -----	22
Investigar sobre a prática -----	23

### **Capítulo III - Metodologia**

Contexto -----	26
Opções metodológicas -----	26
Participantes -----	28
As tarefas de investigação -----	28
Recolha de dados -----	29
Gravação áudio e vídeo -----	30
Análise documental -----	30
Análise de dados -----	31

### **Capítulo IV - Actividades de Investigação: uma experiência com os alunos de uma turma do 8º Ano do liceu Amílcar Cabral – Assomada**

Organização da turma e a realização das tarefas -----	33
Introdução das tarefas -----	33
Desenvolvimento -----	34
Interacção entre os elementos do grupo -----	37
Interacção professor – grupos -----	38
Discussão -----	39
Conclusões da realização das tarefas -----	40
Considerações finais -----	41
Sugestões e recomendações -----	42
Referências bibliográficas -----	44
Anexos -----	47

## **Introdução**

### **Contextualização**

Cientes de que as novas orientações curriculares no ensino da matemática são (a) a máxima aproximação da Matemática à realidade, (b) o uso das novas tecnologias e a resolução de problemas e (c) a utilização de materiais manipuláveis, pretendemos, neste trabalho, desenvolver investigações matemáticas na sala de aula com os alunos de uma turma do 8º ano do Liceu Amílcar Cabral em Assomada.

A etapa do curso que estamos prestes a concluir, como é sabido é Licenciatura em Matemática (ensino). Sendo assim, pretendemos saber até que ponto esses alunos são capazes de lidar com questões de investigação em Matemática. O interesse e o entusiasmo que têm em aulas que privilegiam investigação matemática. Pensamos nessa questão tendo em conta que poucas vezes os alunos têm essa oportunidade de ver o quanto é interessante “descobrir” certas propriedades ou regularidades matemáticas usando os conhecimentos já adquiridos e consolidando os mesmos, a partir de conjecturas formuladas, testadas, provadas ou refutadas. Consideramos, adequadas, as investigações levadas a cabo nesse trabalho porque estão ao nível dos alunos e adaptadas às suas realidades. Pretendemos dessa forma, que os alunos descubram, pensem matematicamente determinados assuntos, ao invés de apresentarmos os conteúdos já acabados.

### **Enquadramento do estudo**

Este trabalho visa, trazer subsídios sobre uma perspectiva de trabalho em sala de aula que privilegia a realização de investigações matemáticas pelos alunos. Serão abordadas as noções de investigação matemática em sala de aula, aula com investigação, tarefa de investigação e actividade de investigação. Além disso, serão colocados em discussão os papéis de professores e alunos nos processos de ensino e aprendizagem da matemática nesta perspectiva. Igualmente serão analisados a forma como os alunos vivenciam as aulas com investigação. Para tal, foi proposta e realizada

duas tarefas de investigação numa turma do 8º ano no referido Liceu. As actividades foram realizadas, inicialmente, em pequenos grupos e, posteriormente, os resultados produzidos por cada grupo foram socializados e discutidos com turma no seu todo.

### **Objectivos**

1) Trazer subsídios teóricos e didático-pedagógicos sobre as noções de investigação matemática em sala de aula, aula com investigação, tarefa de investigação e actividade de investigação;

2) Discutir os papéis de professores e alunos numa aula que privilegia a realização de investigações matemáticas;

3) Analisar a interacção e o interesse dos alunos em aulas com actividades de investigação matemática. Apartir daí traçamos os seguintes objectivos específicos:

(a) levar os alunos a realizarem actividades de investigação na aula de matemática; (b) inteirar do empenho e do interesse que os alunos têm em tais actividades; (c) criar espaço e oportunidade para realização e discussão das mesmas.

### **Estrutura do trabalho**

O presente trabalho encontra-se dividido em quatro capítulos e estruturado do seguinte modo:

Na primeira parte fez-se uma breve introdução seguida da contextualização onde apresentamos a forma como o trabalho foi pensado e desenvolvido. Seguidamente apresentamos os objectivos do trabalho e o nosso plano de trabalho.

No primeiro capítulo apresentamos a fundamentação teórica onde discutimos questões relacionadas com as actividades de investigação e as orientações curriculares e ainda as eventuais mudanças necessárias para que se possa realizar essas actividades com mais frequência. Discutimos igualmente a formação matemática do aluno ou seja os conhecimentos que eventualmente já adquiriram e a forma como estão habituados a trabalhar nas aulas de matemática. Ainda tivemos a oportunidade de falar sobre as etapas do trabalho investigativo onde demos ênfase ao papel do professor e sua interacção com os alunos numa aula com investigações matemáticas.



Já no segundo capítulo tratamos de aspectos relacionados com a matemática e a actividade matemática como, por exemplo, os problemas e a evolução da mesma onde falamos de como os problemas influenciaram na sua evolução. De seguida abordámos a resolução de problemas e as investigações. Nesse ponto mostrámos como é que a resolução de problemas influencia as investigações e ainda qual o contexto para cada um desses assuntos. Ainda nesse capítulo falamos da aula de investigação, os principais momentos de uma aula com investigação, a preparação dessas aulas. Já na parte final deste capítulo falamos sobre a importância da reflexão sobre o trabalho realizado e da necessidade de estudar a possibilidade de se realizar essas actividades com mais frequência.

O terceiro capítulo foi dedicado às questões de ordem metodológica. Assim, justificámos as opções metodológicas bem como a forma como foram escolhidos os participantes nessa actividade. Falámos também um pouco sobre as tarefas de investigação realizadas, as tarefas da recolha de dados e de todo o procedimento. Pudemos ainda explicar como foram feitas as gravações áudio e vídeo e, por fim, explicámos como foi feita a análise documental e a análise de dados.

O quarto e, último capítulo, trata da “parte prática” desse trabalho, ou seja das actividades realizadas numa turma do 8º ano de escolaridade no Liceu Amílcar Cabral em Assomada. Nessa parte descrevemos como foram introduzidas e desenvolvidas as tarefas, como foi a interacção entre os elementos do grupo e a interacção entre o professor e os grupos. Descrevemos ainda como foi a discussão do trabalho realizado e quais as conclusões chegadas. Para concluir esse trabalho deixamos as nossas sugestões e recomendações.

## Capítulo I

### Fundamentação teórica

#### Conceitos

Diversos autores e investigadores da área da Educação Matemática têm sublinhado a importância de se atribuir, na escola, um papel central ao objectivo “pensar matematicamente”, sustentando que um contributo decisivo na aprendizagem pode vir da realização de: (i) actividades que envolvem os alunos, (ii) problemas abertos e (iii) explorações e investigações matemáticas. Com efeito, estas lidam com processos fundamentais da actividade e do pensamento matemático como formular problemas, fazer e demonstrar conjecturas ou comunicar descobertas vejam-se, por exemplo, os artigos de Abrantes et al., (1996).

Entendemos que tem particular importância aqui clarear alguns conceitos de que damos mais atenção no decorrer desse trabalho. Conceitos esses como:

1) **Aulas com investigação** - são aquelas nas quais os alunos são mobilizados a realizar investigações matemáticas em sala de aula.

2) **Tarefas de investigação** - são propostas de trabalho que, por seu grau de abertura a múltiplas abordagens e problematizações, possibilitam a realização de actividades investigativas por parte dos alunos.

Às **actividades de investigação** subentendem as acções dos alunos que resultam da exploração de tarefas de investigação, como por exemplo: explorar e problematizar uma situação, delinear estratégias para desenvolver determinada actividade investigativa.

As investigações matemáticas em sala de aula podem ser fruto da curiosidade de um aluno, grupo de alunos ou classe a respeito de um determinado tema ou problema, mas também podem ser desencadeadas por tarefas propostas pelo professor. No entanto, para que tarefas possam desencadear actividades de investigação por parte dos alunos é necessário que tenham curiosidade, se entusiasmem e recorram a conhecimentos prévios e tenham ligações com o quadro de cultura, entre outras coisas.

A realização de actividades de investigação na aula de matemática pode gerar múltiplas situações inesperadas e potencialmente desafiadoras para os professores, quer

quanto à organização quer quanto à gestão do processo de ensino - aprendizagem. A selecção e adaptação das tarefas e a sua integração no currículo podem constituir o primeiro obstáculo a ser transposto dada a pouca divulgação deste tipo de materiais e a própria natureza dos currículos vigentes, muito centrados em torno dos conteúdos e bastante prescritivos. A proposta de tarefas de investigação para a aula requer a ponderação de diversos elementos de carácter metodológico: a forma como são introduzidas, a organização da turma, o estímulo e o apoio a conceder, a resposta a múltiplas solicitações, a integração dos diferentes caminhos seguidos pelos alunos, a gestão do tempo, a conclusão da actividade e a sua avaliação.

As dificuldades que estas aulas podem criar à prática estabelecida não serão encaradas e geridas de igual forma pelos professores. Os conflitos e os dilemas que surgem são integrados de modo personalizado na acção. Qual a atitude do professor para com eles? Qual o significado que lhes atribui?

A realização de tarefas de investigação na aula pode constituir uma boa oportunidade de estabelecer um contexto de reflexão sobre este tema com os professores. Por um lado, porque segundo Gimeno, (1989), as tarefas constituem os elementos estruturadores nucleares da prática pedagógica do professor; por outro porque, para Olson, (1992), sendo pouco familiares e envolvendo processos complexos geram dilemas que levam o professor a reflectir sobre a sua prática e a explicitá-la.

### **As actividades de investigação e as orientações curriculares**

A mudança de uma sociedade industrializada para uma sociedade de informação, característica da nossa época, exige alterações profundas na educação em geral e também na disciplina de Matemática. De acordo com o NCTM (1991), espera-se hoje que a escola garanta a todos os alunos uma formação matemática básica, levando-os a adquirir a capacidade e o gosto de pensar matematicamente.

Para isso, é preciso que os alunos tenham uma experiência escolar viva e gratificante nesta disciplina. A resolução de problemas pode ajudar a atingir esse objectivo. No entanto, a integração da resolução de problemas no currículo levanta diversas dificuldades: Que tipos de problemas escolher? Que peso dar à resolução de problemas? Como articular a resolução de problemas com outro tipo de trabalho?

Autores proeminentes da área da resolução de problemas como Mason et al. (1991); têm apontado a necessidade de os alunos serem capazes de utilizar os processos próprios da investigação matemática, generalizar, estudar casos particulares, modelar, simbolizar, comunicar, analisar, explorar, conjecturar e provar.

### **A formação matemática do aluno**

Na perspectiva de Borasi (1991), o ensino a que os alunos habitualmente estão sujeitos assenta quase exclusivamente na memorização e na resolução repetitiva de exercícios, o que os leva a adquirir uma visão dualista da Matemática, em termos de certo - ou - errado. Esta visão impede-os de compreender que se podem usar diversas abordagens em muitos problemas matemáticos. Desde muito cedo os alunos vão formando e consolidando também as suas concepções sobre o modo de aprender Matemática, a forma de lidar com tarefas matemáticas, o papel do professor e do aluno, a forma de interagir com os colegas. A ênfase no trabalho em tarefas estruturadas e a pouca atenção à formulação de questões e à interpretação e validação de resultados, contribuem para criar nos alunos uma visão empobrecida do modo de trabalhar e aprender nesta disciplina. Contrariar concepções incorrectas acerca da Matemática e da sua aprendizagem por meio do envolvimento dos alunos em verdadeira actividade matemática é, pois, fundamental.

Há que investigar se a realização destas actividades na sala de aula é viável em níveis de ensino relativamente elementares e se elas contribuem, de facto, para a formação de novas concepções nos alunos. Mais concretamente, é importante saber se realmente os alunos trabalham de modo produtivo em actividades deste tipo, e de que forma eles evoluem no sentido de aprenderem a dar valor à Matemática, a tornar-se confiantes nas suas capacidades e aptos a resolver problemas e a raciocinar matematicamente. Deste modo, o presente estudo tem por objectivo perceber de que forma é que uma turma do 8º ano de escolaridade pode envolver em actividades de exploração e investigação na sala de aula e avaliar a sua influência na mudança ou, no enriquecimento das suas concepções. Garofalo (1989) defende que para se desenvolver nos alunos outras concepções há que pensar de outro modo a sala de aula. As aulas de Matemática tradicionais, onde é ensinado um processo, através de um conjunto de exemplos e exercícios de prática, devem dar lugar a outras onde os alunos desenvolvam

concepções mais correctas acerca desta disciplina: O ensino da Matemática deve dar ênfase a actividades que encorajem os alunos a explorarem tópicos; desenvolver e refinar as suas próprias ideias, estratégias e métodos; e reflectirem e discutirem sobre conceitos e processos matemáticos.

Por seu lado Frank (1988), acredita que as convicções matemáticas dos alunos desenvolvem-se, lentamente, ao longo das suas experiências matemáticas, vividas na sua grande maioria nas aulas desta disciplina. Nestas, os alunos, aprendem muito mais que os conteúdos matemáticos. Eles desenvolvem formas de encarar a Matemática que podem ajudá-los ou constrangê-los na resolução de problemas e actividades de investigação. Assim, esta autora apresenta algumas sugestões a ter em conta se se pretende desenvolver nos alunos concepções acerca da Matemática que se tornem úteis na resolução de problemas e actividades de investigação: (a) começar a resolver problemas desde o início da escolaridade; (b) propor problemas desafiadores, que ocupem os alunos mais do que cinco ou dez minutos, requerendo o uso de diversas estratégias; (c) centrar a atenção nos processos de resolução e não nas respostas, discutindo e valorizando os diferentes processos, mesmo que não conduzam a uma resposta final correcta; (d) usar com frequência o trabalho em pequenos grupos, dando oportunidade aos alunos de comunicar matematicamente, de modo a que desenvolvam confiança em si e nos colegas como autoridades em Matemática e não dependam só do professor; e (e) não colocar a ênfase no cálculo, pois é a resolução de problemas e a realização de actividades de investigação que devem ser valorizadas se queremos que os alunos adquiram uma boa formação matemática.

Em resumo, a investigação realizada sugere que os alunos manifestam por vezes concepções inesperadas e contraproducentes relativamente à Matemática e à sua aprendizagem, que se revelam sobretudo quando confrontados com tarefas diferentes das habituais na aula de Matemática. Os diversos autores dão pistas para a transformação destas concepções: a realização de experiências matemáticas significativas, a reflexão oral, escrita, individual e em grupo sobre essas mesmas experiências e a adequação do modo de trabalhar na sala de aula a esses objectivos curriculares. Torna-se importante saber qual o alcance destas estratégias nos diversos níveis de ensino.

Interessa conhecer os resultados de investigações sobre o alcance curricular e os processos de raciocínio dos alunos em trabalho exploratório e investigativo. É

importante saber se este tipo de tarefa, dada a sua sofisticação matemática, está ao alcance dos alunos de todos os níveis de ensino ou apenas dos níveis mais avançados. É também importante saber se este trabalho é adequado para a generalidade dos alunos, ou apenas para os que revelam mais inclinação pela Matemática.

Diversos autores como (Abrantes, 1994; Resnick, 1987) argumentam que as capacidades básicas e as capacidades de ordem superior não devem ser rigidamente separadas, podendo antes desenvolver-se em conjunto. Será que a investigação realizada sustenta esta ideia?

Num conjunto de estudos passados em revista por Silver (1996), a formulação de problemas tende a surgir como uma actividade criativa destinada apenas a alunos com uma capacidade excepcional para a Matemática ou provenientes de grupos sociais favorecidos. Este autor indica, porém que outros trabalhos apontam, no entanto, numa direcção muito diferente. Na verdade, estudos realizados em escolas públicas, onde a diversidade de origem social dos alunos é muito grande, mostram que todos eles podem beneficiar com este tipo de experiência matemática.

Também para Ernest (1996), a aprendizagem da Matemática está ao alcance de todos e não apenas da minoria socialmente favorecida sendo mesmo uma forma de conferir poder epistemológico à generalidade dos alunos.

### **Etapas do trabalho investigativo**

Segundo (Chapman, 1997; Christiansen et al., 1996) numa aula com investigação, distinguem-se, de um modo geral, três etapas fundamentais: a formulação da tarefa, o desenvolvimento do trabalho e o momento de síntese e conclusão final. No arranque da actividade, o professor procura envolver os alunos no trabalho, propondo-lhes a realização de uma tarefa. Durante a actividade, verifica se eles estão a trabalhar de modo produtivo, formulando questões, representado a informação dada, ensaiando e testando conjecturas e procurando justificá-las. Na fase final, o professor procura saber quais as conclusões a que os alunos chegaram, como as justificam e se tiram implicações interessantes.

O professor tem de manter um diálogo com os alunos enquanto eles vão trabalhando na tarefa proposta, e no final cabe-lhe conduzir a discussão colectiva. Ao longo de todo este processo, precisa criar um ambiente propício à aprendizagem,

estimular a comunicação entre os alunos e assumir uma variedade de papéis que favoreçam a sua aprendizagem.

É hoje consensualmente reconhecido que o professor tem um papel decisivo no processo de ensino - aprendizagem. Ele tem de ser capaz de propor aos alunos uma diversidade de tarefas de modo a atingir os diversos objectivos curriculares. Segundo (Christiansen e Walther, 1986) tem de se preocupar tanto com a aprendizagem dos conteúdos matemáticos propriamente ditos como com o desenvolvimento da capacidade geral de aprender. Por seu lado Bishop e Goffree, (1986) defendem que o professor tem de ser capaz de equilibrar os momentos de acção com os momentos de reflexão, ajudando os alunos a construir os conceitos matemáticos. No entanto, embora haja um interesse crescente acerca do trabalho investigativo em Matemática, o papel do professor neste tipo de actividade tem tido reduzida atenção.

### **Papel do professor**

Importa considerar o que tem de fazer o professor quando os alunos realizam actividades de exploração ou investigação matemática. Que factores se evidenciam como mais importantes para facilitar a sua actuação? Como é que ele pode gerir a situação didáctica, estabelecendo as normas de funcionamento da aula, determinando expectativas, indicando o que é ou não desejável, o que é ou não permitido aos alunos e a si próprio?

Segundo (Ponte et al., 1998), para promover o envolvimento dos alunos nas tarefas, o professor tem de criar um ambiente em que todos os alunos se sintam à vontade para apresentar as suas conjecturas, argumentar contra ou a favor das ideias dos outros, sabendo que o seu raciocínio será valorizado. Wood (1996), aponta a necessidade de que a Matemática desenvolvida na sala de aula constitua uma actividade com significado para os alunos, considerando que, para isso, é essencial que se crie um ambiente em que eles interajam uns com os outros, em que possam exprimir os seus pensamentos e em que questionem as ideias apresentadas pelos colegas.

Para que seja possível e proveitosa esta nova “maneira de viver” na sala de aula é necessário a negociação e estabelecimento de um conjunto de normas de relacionamento entre os alunos e o professor, que indiquem, com clareza, o que se espera de cada um e o que é e não é permitido.

A criação de um ambiente favorável à actividade de investigação é apenas um dos aspectos do trabalho do professor. Outro aspecto, não menos importante, é servir de modelo aos alunos no que se refere ao modo de trabalhar em Matemática. Para Mason (1996), o professor deve ter presente que na sala de aula ele é um representante da comunidade dos matemáticos e que, conseqüentemente, a forma como se envolve nos problemas constitui um modelo para os alunos. Ao observar o professor a raciocinar matematicamente, os alunos poderão focar a sua atenção na formulação e reformulação de problemas, na especialização, na generalização, na elaboração de conjecturas e na argumentação. Assim, reforça-se a importância do professor ser matematicamente confiante:

Essa confiança reside, não em saber as respostas, ou mesmo as técnicas correctas, mas antes em ser capaz de obter uma conjectura plausível, de saber especializar, generalizar e explorar em torno da questão, talvez alterando-a um pouco, ou mesmo drasticamente, até que se possam realizar alguns progressos (p. 80).

De seguida apresentamos diversos tipos de papéis desempenhados pelo professor no decurso da realização de trabalho investigativo na aula de Matemática.

### **Desafiar os alunos**

Para (ponte et al., 1998) o trabalho investigativo começa com a formulação de uma questão que nos intriga e para a qual não encontramos resposta imediata. Formular questões desafiantes para um grupo de alunos não é tão simples como parece à primeira vista. Se a questão for considerada por eles como demasiado difícil, é natural que se sintam intimidados e não se disponham a trabalhar nela. Se for por eles considerada como demasiado fácil, é encarada como maçadora e desinteressante. Se o professor der informação a menos, os alunos podem sentir-se “perdidos” e sem saber por onde começar. Se der informação a mais, pode proporcionar pistas desnecessárias, que distraem os alunos do que realmente interessa. Se der a informação estritamente necessária, sem qualquer ambiguidade, dá indirectamente pistas para a resolução da tarefa. Além disso, o que é excessivo para uns pode ser pouco para outros. São múltiplos os dilemas que o professor enfrenta neste domínio e a solução pode ter de variar de momento para momento, de turma para turma e de aluno para aluno.

A fase de introdução da tarefa constitui um dos principais momentos onde o professor tem de evidenciar a sua capacidade de colocar boas questões. Isso pode ser



feito usando uma variedade de linguagens, incluindo a escrita e a oral. Um enunciado escrito tem a vantagem de fixar a situação de partida, permitindo aos alunos regressar a ela sempre que o entenderem.

### **Avaliar o progresso dos alunos**

No decorrer do trabalho dos alunos, o professor tem de saber se eles compreendem a tarefa proposta, se estão a formular questões e conjecturas, se já as testaram, se são capazes de justificar os seus resultados. Precisa saber se os alunos estão a ter dificuldades por não compreenderem algum conceito importante, porque não relacionam ideias, em princípio, já suas conhecidas, ou porque não encontram uma forma de representação funcional para a informação que lhes é dada. Para isso, necessita de recolher informações e de as interpretar à luz da sua perspectiva de aprendizagem e do seu conhecimento matemático, em especial no que se refere à tarefa em causa. Quando os alunos estão a trabalhar em grupo e o professor percorre os vários grupos, procurando observar o seu trabalho, em regra, a sua primeira acção é precisamente a recolha de informações.

Fazer boas perguntas é essencial para saber o que os alunos estão a pensar. Com base nas informações que recolhe, o professor pode adoptar diversas estratégias: não interferir no trabalho dos alunos, interferir de forma discreta e ligeira, ou dedicar uma atenção considerável a um dado aluno ou grupo de alunos. A avaliação do trabalho já realizado pelos alunos e a identificação das suas dificuldades pode em certos momentos, dar origem a uma transição para outro momento da aula, ou a uma decisão no sentido de prolongar por mais tempo o trabalho que está a ser realizado.

### **Raciocinar matematicamente**

Por muito bem que o professor tenha preparado a aula, podem sempre surgir novas questões matemáticas em que ele ainda não pensou, especialmente se a situação é verdadeiramente aberta e estimulante. Neste caso, pode acabar por se envolver, em frente dos seus alunos, em raciocínio matemático.

### **Apoiar o trabalho dos alunos**

Durante a realização de uma investigação, o professor procura apoiar os alunos a progredir seu trabalho. Para isso tem de considerar dois aspectos: (a) a exploração

matemática da tarefa proposta e (b) a gestão da situação didáctica, promovendo a participação equilibrada dos alunos na actividade da aula. Uma das maneiras de apoiar o progresso dos alunos na sua actividade é através de perguntas adequadas.

### **Fornecer e recordar informação**

Outro aspecto do trabalho do professor é proporcionar informação útil aos alunos, ajudando-os a recordar ou compreender conceitos matemáticos e formas de representação importantes. Trata-se de uma faceta bem conhecida do trabalho do professor que, muitas vezes, como sabemos, assume mesmo um lugar dominante. Na actividade investigativa esta faceta também existe, embora não assuma uma proeminência tão grande como noutras formas de trabalho.

Numa discussão, não faz sentido manter um diálogo do qual estão necessariamente afastados muitos alunos por não compreenderem os conceitos - chave que estão a ser utilizados. Por isso, recordar conceitos anteriormente estudados, quando necessário, é uma preocupação importante do professor. Pode ser ele a apresentar directamente a informação ou pode atingir esse objectivo, indirectamente, através de perguntas colocadas aos alunos. A segunda via, desde que possível, envolve mais os alunos na actividade e dá mais informação ao professor sobre os seus conhecimentos e eventuais dificuldades. A introdução de novas ideias, novas formas de representação, novas conexões, é um dos papéis essenciais do professor que pode também ser exercido no decurso do trabalho investigativo. Ao proporcionar actividades que promovem a frequente reutilização dos conceitos e conhecimentos básicos (aritméticos, geométricos, algébricos), o professor está a promover a sua consolidação e melhor compreensão por parte dos alunos. Ao chamar a atenção para a densa rede de ligações entre as ideias matemáticas, o professor está a contrariar a tendência dos alunos para as arrumarem em compartimentos isolados, ajudando-os a desenvolver um conhecimento matemático muito mais rico e completo (Ponte, et al., 1998).

### **Promover a reflexão dos alunos**

No decurso da realização de uma actividade de investigação é importante que os alunos relacionem o trabalho que estão a fazer com ideias já suas conhecidas e possam desenvolver a sua compreensão do que é a Matemática (Ponte, et al., 1998). A discussão

final é, em geral, um bom momento para promover uma visão geral dos vários aspectos da situação e das diversas estratégias que podem ser usadas para a explorar. Desenvolver uma apreciação correcta da Matemática e do pensamento matemático é um importante objectivo educacional e o professor precisa de estar atento às oportunidades que possam surgir nesse sentido.

Os alunos precisam de desenvolver uma apreciação da importância e do valor dos processos em que estão envolvidos e dos resultados que vão obtendo. Para isso, uma das estratégias mais usadas pelo professor é o comentário directo à pertinência das suas afirmações.

### **Papel dos alunos**

Atribuímos ao aluno um papel activo nessas aulas. Consideramos que a investigação é da responsabilidade do aluno pelo que a intervenção do professor deve ser bastante limitada para que a actividade de investigação se decorra da melhor forma. Por outro lado, como já foi referido, o objectivo para essas aulas é que os alunos se envolvam na actividade investigativa, assumindo menor importância ao produto final. Oliveira (1998) defende que o mais importante nessas aulas não é chegar ao fim e apresentar os resultados certos ou errados, mas sim o envolvimento nas actividades. Na verdade reconhecemos que há alunos que têm mais jeito para actividades de investigação do que outros. No entanto, nunca observamos fenómenos de auto-exclusão por parte dos alunos, mesmo os com menos jeito para essas actividades mostraram-se bastante empenhados. Observamos ainda que os alunos em geral, não só apreciam trabalhar deste modo como o sabem fazer razoavelmente bem. Os alunos desenvolveram a atitude de discutirem muito bem o que se relaciona com a questão que estão a estudar antes de passarem a considerar a questão seguinte.

## Capítulo II

### Aspectos da formação matemática

#### A Matemática e a actividade matemática

A matemática é frequentemente encarada como uma ciência exacta, pura, constituindo um corpo de conhecimentos construído dedutiva e cumulativamente, com rigor absoluto. Porém, diversos educadores matemáticos têm vindo a defender que é necessário ter em conta a prática dos matemáticos e olhar para a matemática principalmente como uma actividade humana. Ou seja, para compreender a verdadeira natureza da matemática é importante analisá-la numa perspectiva dinâmica, procurando compreender a forma como ela é construída e como evolui. Para Pólya (1957), “a matemática tem duas faces; é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também algo mais...”

#### Os problemas e a evolução da Matemática

É por muitos reconhecido a importância que os problemas desempenham na evolução da Matemática. Como afirma o matemático Stewart (1995) “os problemas são a força motriz da Matemática [...] um bom problema é aquele cuja solução, em vez de conduzir a um beco sem saída, abre horizontes inteiramente novos...” (p. 17). Andrew Wiles, o famoso matemático que descobriu a demonstração do Teorema de Fermat, vai ainda mais longe. Segundo ele “é bom trabalhar em qualquer problema contanto que ele gere Matemática interessante durante o caminho mesmo se não o resolvermos no final” (Singh, 1998, p. 184). Este matemático, que protagonizou uma das histórias mais fascinantes da Matemática contemporânea, conta como o seu contacto com as investigações, ainda em criança, foi decisivo:

Desde que pela primeira vez encontrei o Último Teorema de Fermat, em criança, ele tem sido a minha maior paixão... Tive um professor que realizara investigações em Matemática e que me emprestou um livro sobre Teoria dos Números, que me deu algumas pistas sobre como começar a atacá-lo. Para

começar, parti da hipótese de que Fermat não conhecia muito mais Matemática do que a que eu aprendera. (Singh, 1998, p. 93)

Naturalmente que Wiles é um caso extremo: provou um teorema que tinha desafiado os matemáticos durante 350 anos. Mas este testemunho encerra dois aspectos significativos. Por um lado, existiu alguém que teve um certo papel na sua história: o seu professor de Matemática. Este concedeu atenção ao interesse do aluno por este tema, às investigações que o fascinavam, e acalentou-o. Por outro lado, mostra, mais uma vez, a influência motivadora que os bons problemas podem ter.

Mas se é indiscutível o interesse dos problemas para os matemáticos, é necessário compreender também qual o seu alcance educativo. Ou seja, será possível estabelecer um paralelo entre a actividade do matemático e a actividade do aluno na aula de Matemática?

Obviamente que os conhecimentos que o matemático possui, os processos de que faz uso, o grau de especialização que atinge, o tempo e o interesse que dedica à sua actividade são em dimensão incomparáveis com os do aluno. No entanto, a actividade de resolução de problemas de ambos pode ser equivalente quanto à sua natureza. Hadamard (1945) refere, por exemplo, que a análise do trabalho de um aluno que resolve um problema pode revelar apenas a existência de “uma diferença de grau, uma diferença de nível” (p. 104) em relação ao trabalho de invenção do matemático. Esta proximidade é também defendida por Ernest (1991), para quem a actividade de resolução e formulação de problemas pelo aluno tem um paralelo na actividade do matemático profissional desde que seja produtiva: “qualitativamente não diferem” (p.283). Por “produtiva” este autor entende aquela Matemática que é criativa, por oposição à Matemática não - produtiva. A temática da resolução de problemas é, pois, determinante para compreender até que ponto é possível aproximar o trabalho do aluno na disciplina de Matemática da actividade matemática.

### **A resolução de problemas e as investigações**

O tema da resolução de problemas tem tido, desde o início da década de 80, uma atenção particular na Educação Matemática. Para isso contribuíram, especialmente, as ideias de Pólya (1962/81). Segundo ele, o desenvolvimento pelos alunos da capacidade

de resolução de problemas matemáticos deveria ser um dos objectivos principais do ensino da Matemática (no ensino secundário). O pensamento matemático que os alunos devem desenvolver na escola é constituído não só por raciocínio rigoroso ou formal mas também por processos informais, entre outros: “generalizar a partir da observação de casos, argumentos indutivos, argumentos por analogia, reconhecer ou extrair um conceito matemático de uma situação concreta” (p. 101).

Pólya (1962/81) procurou também descortinar o significado de problema, num sentido amplo, fazendo distinção entre o problema em si e o processo de resolução. Uma pessoa tem um problema quando procura “conscientemente uma certa acção apropriada para obter um objectivo claramente concebido mas não atingível de maneira imediata.” (p. 117). Ao realizar essa acção deu-se a resolução do problema. Inerente ao conceito de problema é a noção de dificuldade, sem esta não existe problema.

Esta noção de problema foi sendo progressivamente enriquecida por se considerar importante apresentar aos alunos não apenas problemas já perfeitamente formulados em contextos muito precisos. Muitas vezes, o processo de resolução pode implicar a exploração do contexto para além do que surge no enunciado, a formulação de questões alternativas. Uma perspectiva ainda mais ampla é dada por autores como Mason (1996) e Schoenfeld (1996) que, partindo da resolução de problemas, valorizam todo um conjunto de processos característicos da actividade matemática como formular, testar e provar conjecturas e argumentar.

Chegamos assim às actividades de exploração e de investigação matemática. Uma investigação é uma viagem até ao desconhecido. A ideia pode ser ilustrada pela metáfora geográfica de Pirie (1987): “o importante é explorar um aspecto da Matemática em todas as direcções. O objectivo é a viagem e não o destino” (1987, p. 2). Assim, na resolução de problemas tal como é entendida inicialmente, o objectivo é encontrar um caminho para atingir um ponto não imediatamente acessível. É um processo convergente. Numa investigação matemática, o objectivo é explorar todos os caminhos que surgem como interessantes a partir de uma dada situação. É um processo divergente. Sabe-se qual é o ponto de partida mas não se sabe qual será o ponto de chegada.

### **A aula de investigação**

Segundo Christiansen e Walther, (1986), de um modo geral, a estrutura de uma aula com investigações envolve as seguintes fases: introdução da tarefa, desenvolvimento do trabalho e discussão final/reflexão.

A fase de introdução da tarefa é bastante importante pois tem uma dinâmica própria que poderá influenciar decisivamente o sucesso do trabalho, principalmente se os alunos não estiverem familiarizados com este tipo de actividade. Nesta fase de arranque é determinante o modo de apresentação da proposta de trabalho à turma. Pode optar-se pela distribuição do enunciado escrito acompanhado por uma pequena apresentação oral que pretenderá, por um lado, clarificar a tarefa e explicitar o tipo de trabalho que se quer desenvolver com as investigações e, por outro, criar um ambiente favorável ao desenvolvimento do trabalho dos alunos. Pode ser feita uma leitura em grande grupo, pensando principalmente em alunos mais novos, acompanhada por alguns comentários que o professor considere mais pertinentes, ou por algumas questões cujas respostas revelem se os alunos estão, ou não, a entender o que lhes é proposto. Pode-se, simplesmente, apresentar a tarefa por escrito, sem que se faça uma discussão inicial do enunciado. Isto poderá implicar um maior apoio do professor junto dos grupos no sentido de os ajudar a entender o que se pretende. No entanto, se a apresentação escrita da tarefa estiver o mais clara possível este apoio poderá ser minimizado e os alunos poderão iniciar a exploração mais autonomamente. O aumento da experiência neste tipo de trabalho leva a que os alunos criem progressivamente uma maior independência em relação ao professor e percebam mais facilmente o que lhes é pedido. Em alguns casos, a tarefa pode ser proposta apenas oralmente, sem nenhum suporte escrito, podendo o professor, eventualmente, ir registando no quadro algumas informações essenciais. Finalmente, podemos pensar ainda no caso da introdução da proposta de trabalho não ser preparada previamente pelo professor, surgindo a tarefa, espontaneamente, na aula a partir da actividade dos alunos.

Na fase de desenvolvimento do trabalho pretende-se que os alunos adquiram uma atitude investigativa, devendo por isso haver a preocupação em centrar a aula na actividade dos alunos, nas suas ideias e na sua pesquisa. Durante esta fase, o professor tem um papel de orientador da actividade. O decorrer da aula depende, em grande parte, das indicações que fornece sobre o modo de trabalho dos alunos e do tipo de apoio que

presta no desenvolvimento das investigações. Diversas são as situações em que o professor é chamado a intervir e por isso deve estar preparado para reagir, perspectivando o desenvolvimento nos alunos de um conjunto de capacidades e atitudes essenciais. Ao longo de toda esta fase o professor deve ter uma atitude questionadora perante as solicitações de que é alvo. Segundo o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM 1994), o professor deve colocar regularmente a pergunta “porquê” a seguir aos comentários dos alunos, de modo a “provocar o raciocínio”, levando-os a analisar e reflectir sobre o seu trabalho e a procurar significado para as suas descobertas. Nesta linha, podemos identificar outras questões com que o professor também deve desafiar os alunos: *Como explicam isso? Qual a relação entre essas ideias? Porque é que dizes que não poderá ser...?*

Na altura do arranque do trabalho, os alunos podem mostrar dificuldades que os impedem de realizar as suas investigações. Geralmente, quando estão pouco habituados ao trabalho de natureza investigativa, chamam rapidamente o professor, dizendo que não sabem o que é para fazer, pois não vislumbram nenhuma resposta imediata. Isto acontece porque não compreendem a natureza da tarefa proposta, cabendo aqui ao professor explicar-lhes um pouco do que é o trabalho investigativo e concretizar isso através de um ou outro exemplo.

O processo investigativo, em que os alunos se envolvem durante a fase de desenvolvimento da tarefa, compreende diversas etapas fundamentais. Primeiramente, tentam compreender a situação proposta, organizam os dados e formulam questões. Depois, fazem conjecturas, procuram testá-las e, em alguns casos, demonstrá-las. No caso de os alunos mostrarem dificuldades em organizar os dados e em formular questões, e sendo isto determinante para o prosseguimento da investigação, o professor deverá apoiá-los. Para levá-los a descobrir o que têm a fazer deve colocar-lhes questões mais ou menos indirectas consoante o seu grau de familiaridade com este tipo de tarefas. Poderá, por exemplo, colocar questões relativas àquilo que eles já fizeram, dizer que analisem atentamente um conjunto de dados já obtidos, sugerir que organizem esses mesmos dados de outra maneira...

Muitas vezes as solicitações feitas pelos alunos ao professor vão no sentido de validar os seus processos ou ideias. Como resposta o professor não deverá emitir opiniões muito concretas mas sim incentivar o espírito crítico, a reflexão e a procura de argumentos e razões que permitam aos alunos confirmar ou não as suas conjecturas.



Outras vezes, sendo o confronto de opiniões essencial neste tipo de actividade, o professor deve levar cada aluno a explicar e argumentar a favor do seu ponto de vista colocando questões como: *O que te leva a pensar isso?* Ou *Porque não concordas com a ideia do teu colega?* Este tipo de atitude fomenta a interacção entre os alunos, que vão aprendendo a discutir, a descobrir novas relações entre conceitos, a ter mais segurança nas suas ideias matemáticas e a desenvolver o raciocínio e a criatividade.

Durante o trabalho investigativo, os alunos poderão seguir por caminhos através dos quais não serão bem sucedidos. Nesta situação, o professor deverá evitar dizer-lhes imediatamente que seguem um caminho infrutífero e dar algum tempo para que seja a sua própria experiência a mostrar-lhes o erro. No entanto, tem de ter cuidado para que essa exploração mal conduzida não se prolongue demasiado e não acabe por lhes provocar desmotivação. Assim, por vezes é necessário que o professor avance com pistas mais directas para um caminho possível a seguir na exploração da tarefa, relembrando, por exemplo, situações já exploradas anteriormente e cujas estratégias poderão ser análogas às que os alunos poderão implementar.

Algumas vezes, o aluno também pode seguir por caminhos que o professor nunca tinha pensado e que levam ao aparecimento de resultados inesperados. Assim, o professor precisa de estar atento a essas descobertas e disponível para perceber e dar continuidade a esses caminhos.

Durante a fase de discussão o professor, na sua função de moderador e orientador, cabe-lhe estimular a comunicação entre os alunos. Nesta fase os alunos são confrontados com hipóteses, estratégias e justificações diferentes das que tinham pensado, são estimulados a explicitar as suas ideias, a argumentar em defesa das suas afirmações e a questionar os colegas. É também esta a altura adequada para se clarificarem ideias, se sistematizarem algumas conclusões e se validarem resultados.

Ao organizar a fase de discussão o professor deve conhecer bem o trabalho dos alunos de modo a valorizar tanto as descobertas mais interessantes como as mais modestas (Mason, 1996; Ponte et al., 1998). A altura para realizar esta discussão pode ser variável. O ideal é fazê-la logo após a exploração da tarefa, mas muitas vezes isso não é possível devido ao horário espartilhado dos alunos. Frequentemente o que acontece é que o desenvolvimento da actividade de investigação decorre numa aula e a discussão apenas na aula seguinte, o que dificulta o arranque da discussão final, pois os alunos, de uma aula para a outra, já não se lembram tão bem daquilo que fizeram e, de

uma maneira geral, os registos escritos não são suficientemente ricos para os ajudar. Seria conveniente realizar o trabalho com investigações em aulas de duas horas, pois isso permitiria que a fase de discussão tivesse lugar na segunda hora, ou em parte dela. Por vezes, pode ser útil proporcionar um momento de discussão durante a realização da tarefa com o objectivo de ajudar os alunos a ultrapassar certas dificuldades, de motivá-los em fases mais críticas do trabalho, ou mesmo de enriquecer a investigação.

Durante a fase de discussão o professor, na sua função de moderador e orientador, cabe-lhe estimular a comunicação entre os alunos. Nesta fase os alunos são confrontados com hipóteses, estratégias e justificações diferentes das que tinham pensado, são estimulados a explicitar as suas ideias, a argumentar em defesa das suas afirmações e a questionar os colegas. É também esta a altura adequada para se clarificarem ideias, se sistematizarem algumas conclusões e se validarem resultados.

### **A preparação de aulas de investigação**

Para que a realização de actividades de investigação na aula de Matemática constitua realmente um momento de aprendizagem significativa para os alunos, torna-se necessário que o professor invista bastante na preparação dessas aulas. Efectivamente, a variedade de processos em que os alunos se podem envolver, bem como o seu grau de complexidade e até de imprevisibilidade, exigem do professor uma preparação cuidada que vai para além da tarefa que propõe aos alunos. Ou seja, torna-se também necessária uma atitude por parte do professor que deve ser, também ela, de carácter investigativo e uma reflexão sobre os objectivos que se pretendem atingir com a realização de actividades de investigação. Cabe, assim, ao professor participar activamente na elaboração do currículo, delineando objectivos, metodologias e estratégias, e reformulando-os em função da sua reflexão sobre a prática (Ponte et al., 1998). Ele precisa de decidir aspectos como:

- Qual o peso relativo a atribuir às actividades de investigação? Devem elas constituir-se como um eixo condutor do trabalho com os alunos, estão a par com outras actividades ou, pelo contrário, assumem um peso menor no currículo?
- Como se relacionam as investigações com os conteúdos a serem leccionados? Estes devem estar na sua base, ou a sua presença tem uma importância

secundária? Os conteúdos podem surgir a partir da actividade ou esta deverá ser realizada depois de serem tratados?

A preparação das aulas de investigação propriamente ditas constitui outra fase importante. Em primeiro lugar há que seleccionar, adaptar ou mesmo construir a tarefa, o que deve ter em conta vários aspectos. Por um lado, para que a tarefa possa realmente desencadear uma investigação por parte dos alunos, é preciso escolher situações potencialmente ricas e formular questões suficientemente abertas e interessantes, de forma a estimularem o pensamento matemático dos alunos. Para isso o professor tem necessidade de fazer uma pesquisa em torno de vários materiais que podem variar entre manuais escolares, livros com propostas de problemas e investigações e, mais recentemente, o mundo da Internet. Mas mais do que esta pesquisa, ele precisará de recorrer à sua criatividade para dar forma à tarefa, adaptando as situações, reconstruindo as questões da maneira que melhor servir os seus objectivos. Por outro lado, esta escolha está também dependente dos alunos que a irão trabalhar, devendo o professor ter em conta o seu nível etário, o seu desenvolvimento matemático, a familiaridade que têm com o trabalho investigativo, os seus interesses, etc.

Além de preparar a tarefa, é necessário pensar na estrutura das aulas, por exemplo, no modo de trabalho dos alunos. É muito habitual neste tipo de actividade organizar os alunos em pequeno grupo, mas cabe ao professor decidir se a realização da tarefa poderá constituir uma oportunidade para trabalho individual, em pequeno grupo ou mesmo no grupo - turma. Para além da organização dos alunos, deve ser considerada a realização de diferentes momentos durante as aulas, bem como a respectiva gestão do tempo. A realização de aulas de investigação comporta, como vimos, três fases distintas a introdução da tarefa, a sua realização pelos alunos e a discussão/reflexão conjunta. No entanto, mesmo a adopção desta perspectiva requer muitas outras decisões: A introdução deverá ser breve, mencionando apenas aspectos de gestão do trabalho da turma, ou poderá conter uma exploração inicial da tarefa? Na fase de realização, que questões ou dicas poderão ajudar os alunos? Durante a discussão, como promover a participação dos vários alunos?

Outra opção a tomar é relativa à utilização de materiais. Se é verdade que em alguns casos basta-nos o enunciado da tarefa e material de escrita, é também verdade que a utilização de recursos, como *software* dinâmico de Geometria (caso do Cabri ou Sketchpad) ou *software* de cálculo simbólico (como o DERIVE) proporciona a

realização de investigações bastante interessantes que, de outro modo se tornariam difíceis ou mesmo impossíveis de realizar.

Estas são algumas das questões a que o professor deve atender na preparação das aulas de investigação. A importância desta fase é tanto maior quanto menor for a experiência do professor na realização de trabalho investigativo, pois ela constitui um reforço bastante significativo para a segurança que sente no seu desempenho, durante estas aulas. Contudo, é preciso não esquecer que esta é apenas uma base de trabalho e que o professor deve estar preparado para alterar a sua agenda consoante o rumo dos acontecimentos, sendo que a capacidade de reflexão na acção é aqui particularmente importante.

### **Reflectir sobre o trabalho realizado**

Se a preparação das aulas de investigação constitui um momento necessário, não menos importante é a reflexão sobre o trabalho realizado. Nela cabem essencialmente duas avaliações:

- Uma avaliação sobre a forma como decorreram as aulas e que conduz a questões como: A tarefa mostrou-se adequada aos objectivos iniciais? Os materiais e recursos utilizados foram úteis? A organização dos alunos foi pertinente? Deve ser alterada? A introdução da tarefa foi suficiente? A gestão do tempo foi boa? Que dificuldades foram sentidas? ...
- Uma avaliação (ainda que informal) sobre o trabalho e a aprendizagem dos alunos e que se debruça sobre questões como: De que forma reagiram os alunos à tarefa? Como está a evoluir a sua relação com as investigações? Em que tipo de processos (questionar, conjecturar, testar, provar...) demonstram maior facilidade ou dificuldade? Como se está a desenvolver a sua capacidade de expressar ideias matemáticas (oralmente ou por escrito)?

Esta reflexão torna-se bastante importante por várias razões. Por um lado, ela informa o professor sobre o trabalho futuro sugerindo o reforço, manutenção ou diminuição deste tipo de trabalho, apontando estratégias mais apropriadas para a sua realização, alertando para obstáculos ou condições facilitadoras a ter em conta. Por outro lado, a reflexão constitui-se também como um momento de aprendizagem do

professor sobre outras formas que possibilitem o melhor desempenho do seu papel, atendendo também a um maior conhecimento que vai construindo sobre os seus alunos, sobre as actividades de investigação e sobre a relação destas com a aprendizagem dos alunos.

### **Investigar sobre a prática**

A realização de investigações por parte dos alunos não deve ser, na nossa perspectiva, uma actividade esporádica, pelo contrário, deve ser uma actividade frequente e regular na sala de aula. Para que isso aconteça é importante que os professores concebam projectos de trabalho nas suas escolas onde a actividade investigativa possa assumir uma presença importante. Na verdade, são muitos os obstáculos que se levantam à prática regular deste tipo de actividades, tornando-se extremamente penoso para o professor defrontá-los isoladamente.

Alguns dos obstáculos estão directamente relacionados com o próprio professor e envolvem, por exemplo, (i) o seu conhecimento de certos tópicos, eventualmente mais reduzido, (ii) uma experiência pessoal limitada na realização de trabalho de cunho investigativo, (iii) algum receio relativamente às questões matemáticas e (iv) às questões de dinâmica da aula que podem emergir neste tipo de trabalho. Trata-se de questões que podem ser ultrapassadas pela experimentação controlada, pela reflexão continuada sobre as aulas realizadas, pelas trocas de experiências com outros colegas. Outros obstáculos resultam de aspectos do contexto escolar onde o professor está inserido. As coisas são mais difíceis quando não existe uma cultura que valorize as actividades de investigação matemática, nomeadamente a nível do grupo disciplinar, quando há falta de espaços de trabalho, para os professores trocarem experiências entre si, quando há falta de livros e materiais com sugestões de tarefas, relatos de experiências e orientações curriculares, e quando a estrutura organizativa da escola é demasiado rígida (impedindo, por exemplo, a utilização de espaços e tempos mais flexíveis de trabalho do que as aulas de 50 minutos).

A cultura da escola pode ser um elemento fundamental para a criação de uma atmosfera de encorajamento à experimentação e inovação curricular. Mas uma cultura favorável a estes processos não se cria por decreto. Constrói-se, lentamente, pela prática colaborativa de professores empenhados em projectos inovadores comuns. Esses

projectos podem assumir múltiplas vertentes, envolvendo a programação de aulas e actividades a realizar com os alunos, a criação de espaços de trabalho propícios à realização de trabalho investigativo, a criação de bancos de recursos e materiais como livros, revistas, dossier com tarefas, listas de endereços de Internet dedicados ao tema das investigações e a temas relacionados com este tipo de trabalho.

A existência de materiais diversos, de qualidade e acessíveis aos professores é certamente um elemento importante para a generalização deste tipo de trabalho. Esses materiais podem incluir tarefas para os alunos dos diversos níveis de escolaridade, relatos de experiências, e documentos de orientação curricular. A nossa perspectiva é que muitos desses materiais podem ser produzidos e organizados nas escolas pelos professores. Deste modo, eles não serão simples consumidores de materiais produzidos por outros, mas podem desempenhar igualmente um papel extremamente importante na sua produção.

Do mesmo modo que a realização de investigações matemáticas constitui um poderoso meio de aprendizagem matemática para o aluno, a realização de investigações sobre a sua prática constitui um poderoso meio de desenvolvimento profissional e de formação para os professores. A realização de projectos de investigação, a nível da escola ou de pequenos grupos de professores, poderá ser um modo privilegiado para desenvolver nos professores os saberes necessários à realização de actividades de investigação.

Estes projectos podem assumir natureza muito diversa. Podem respeitar apenas o trabalho realizado na sala de aula ou articular trabalho realizado em vários espaços escolares e extra-escolares. Podem envolver actividades mais formais, com elaboração de relatórios escritos ou combinar aspectos formais e informais. Podem envolver a recolha de dados através de vídeos, observações directas dos alunos, questionários, bem como a análise dos relatórios por eles produzidos. Em qualquer caso, estes projectos, para assumirem um cunho verdadeiramente investigativo devem ter as características fundamentais que marcam a realização de qualquer investigação em qualquer domínio:

1. Uma **questão** (ou um conjunto de questões) bem definidas, para as quais se pretende obter uma resposta.
2. Uma **conjectura** (ou um conjunto de conjecturas), informada por experiência anterior e por princípios educativos sólidos, que indique as direcções de trabalho a prosseguir.

3. A realização de **testes** práticos, pondo à prova as conjecturas, através da realização de experiências na sala de aula e da recolha de dados indicando os respectivos resultados.
4. A **validação** dos resultados obtidos, através de uma análise de dados cuidadosa, da construção de uma argumentação que evidencie o alcance do trabalho feito e da respectiva divulgação.

## Capítulo III

### Metodologia

#### Contexto

Este capítulo explica as opções metodológicas do estudo, a forma como foram recolhidos e tratados os dados, e ainda como foram seleccionados os participantes, nesse caso a turma do 8º ano (8ºA18) onde foram realizadas as actividades de investigação.

#### Opções metodológicas

Trata-se de um *estudo de caso* em que se focou a atenção numa turma, no seu ambiente natural, neste caso a sala de aula, tirando partido de *fontes múltiplas de evidência* (Yin, 1984), como, observações, gravações áudio e vídeo e documentos produzidos pelos alunos. Esta diversidade de instrumentos é de grande importância quando queremos aceder a fenómenos dessa natureza.

As tarefas de exploração e investigação realizaram-se nas aulas de Matemática, estando assim estes alunos envolvidos no seu ambiente normal ou seja o habitual. O investigador assumiu um papel de destaque na recolha, interpretação e descrição dos dados, tendo dado especial atenção aos pontos de vista dos alunos e ao seu desenvolvimento ao longo do estudo. Deste modo, a investigação enquadra-se numa abordagem de cunho qualitativo que, segundo Bogdan & Biklen (1982) é caracterizada por: (1) o ambiente natural é a fonte directa dos dados e o investigador é o principal instrumento de recolha; (2) os dados recolhidos são predominantemente descritivos; (3) a preocupação com o processo é muito maior do que com o produto; (4) é dada especial atenção aos pontos de vista dos participantes; e (5) a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo.

Foi feita a opção de ser o próprio investigador o professor da turma, o que segundo certos autores acarreta algumas dificuldades. A opção assentou no facto de se pretender que este estudo decorresse num contexto de sala de aula onde as tarefas de exploração e investigação tivessem lugar e fossem abordadas de modo a haver uma



cuidada interacção professor - aluno, assumindo o professor apenas o papel de orientador. Para além deste aspecto, houve ainda a ter em conta que, por um lado, é na interacção entre observador e observado que emerge muito do conhecimento que se pretende alcançar, logo o duplo papel de investigador e professor não deverá ser tomado como um obstáculo mas como veículo de conhecimento e que, por outro lado, a sua presença leva a que não se modifique o comportamento habitual dos alunos.

A realização dessas aulas com actividades de investigação teve como principal objectivo analisar a interacção e o interesse dos alunos em aulas com actividades de investigação matemática. Nomeadamente, conhecer os desafios que estas lhes colocam, como enfrentam e ainda ver as componentes dos conhecimentos já adquiridos que eles evidenciam na aquisição ou consolidação de outros conhecimentos.

Por seu lado Yin (1989) propõe a análise de três aspectos que devem orientar a escolha da metodologia de investigação: (1) o tipo de questões do estudo; (2) o grau de controlo que o investigador tem sobre as variáveis ou acontecimentos e (3) o foco situar-se ou não em acontecimentos que ocorrem no momento do estudo. O estudo de caso, segundo este autor, é a estratégia adequada quando se reúnem várias características relativas a cada um dos três aspectos anteriores. Assim, as questões do estudo devem ser “como” e “porquê” e não “quem”, “o quê”, “quantos” ou “quando”. Por outro lado, quanto aos pontos (2) e (3), não é possível controlar variáveis e acontecimentos e o foco do estudo diz respeito a acontecimentos que ocorrem no momento do estudo.

A análise destes três aspectos relativamente ao presente estudo clarifica sobre a pertinência de optar por uma metodologia de estudo de caso. De facto, o problema do estudo focou-se na compreensão da evolução dos alunos relativamente à forma de explorar tarefas de investigação e de ver a Matemática e a sua aprendizagem. Por outro lado, o estudo incidiu em fenómenos que foram sendo observados e analisados à medida que se desenvolvia a actividade. Finalmente, o professor desempenhando o papel de investigador, pretendeu-se descrever e interpretar o decorrer dessas actividades. No nosso caso, a forma como realizamos as duas actividades mostrou a evolução dos alunos na segunda actividade de investigação. Isso deve-se ao facto de ser a primeira vez que esses alunos lidam com actividades do tipo. Por isso na primeira tarefa era preciso elucidar alguns conceitos como o caso de conjectura e que já na segunda tarefa foi facilmente entendido.

Para Jorgensen (1989), quando se pretende descrever de um modo compreensivo e exaustivo um fenómeno, a observação participante é um instrumento de recolha de dados fundamental. Também:

Nas situações em que os motivos, as atitudes, as crenças e os valores dependem muito, se não quase totalmente da actividade humana, o instrumento mais sofisticado que temos ainda é uma observação cuidadosa - o ser humano que pode observar, ver, ouvir, questionar, pôr à prova e finalmente analisar e organizar a sua experiência concreta (Merriam, 1988, p. 103).

### **Participantes**

No momento da realização do presente estudo de caso, o professor lecciona em cinco turmas do 8º ano no Liceu Amílcar Cabral em Assomada. Contudo, o professor optou por realizar a actividade numa turma (8º A18) em que considera com melhores condições para realização de actividades dessa natureza. A referida turma é constituída por 22 (vinte e dois) alunos, enquanto as outras por 35 (trinta e cinco) a 41 (quarenta e um) alunos cada. A turma em que foi realizada essas actividades é uma turma com bons hábitos de trabalho e com alunos de diferentes classes sociais e com diferentes formas de trabalhar. O relacionamento entre o professor e a turma é bastante satisfatório o que de certa forma motivou os alunos durante a realização dessas actividades. Esses alunos de vez em quando faziam trabalho em pequenos grupos, pelo que estavam habituados em trabalhar em grupo. Por outro lado era a primeira vez que realizavam uma actividade de investigação matemática na sala de aula. No entanto o professor dado ao bom relacionamento que tem com a turma já tinha-lhes informado dessa ideia e a turma se mostrou muito entusiasmada e curiosa em realizar actividades dessa natureza. Pelo que os vinte e dois alunos da turma aderiram prontamente á ideia do professor e puseram isso na prática.

### **As tarefas de investigação**

Tendo em conta o nível de escolaridade em que os alunos se encontram, a inexperiência dos alunos em realizar actividades dessa natureza, pareceu apropriado escolher essas actividades por diferentes motivos que apresentamos por ordem arbitrária; por serem actividades desafiantes; por serem constituídas por várias

subtarefas orientando bastante o trabalho do aluno; por permitirem o aprofundamento e a aquisição de novos conhecimentos.

Em relação à primeira actividade intitulada “Regularidades nas potências” (ver anexo p. 49) a questão 1 ajuda os alunos a notar que nem todos os números podem ser escritos como potências (inteiras) de uma certa base (inteira). Ao formularem conjecturas acerca das propriedades das potências de base 2 e de base 3, os alunos estão implicitamente a estabelecer critérios para verificar se um dado número é potência de uma dessas bases. Já a questão 2 dessa primeira actividade sugere o estudo de um tipo diferente de regularidades, mais estrutural.

Na segunda actividade intitulada “divisões por 11, 111... (ver anexo p. 50) o objectivo é a exploração de regularidades do período das dízimas obtidas pela divisão de um número inteiro por 11, por 111 por 1111... esta tarefa permite exploração com diferentes graus de profundidade dependendo do nível de escolaridade dos alunos e do número de aulas que o professor decidir usar. As três questões apresentadas são de complexidade crescente, podendo, eventualmente, explorar-se apenas a primeira ou as duas primeiras uma vez que são independentes.

### **Recolha de dados**

A observação constitui para a investigação uma importante ferramenta de trabalho, que permite obter informação bastante diferente daquela que normalmente é obtida através de outras técnicas. A observação ocupa segundo Ludke e André (1986) um lugar privilegiado nas abordagens qualitativas. Usada como principal método de recolha de dados ou associada a outras técnicas a observação possibilita um contacto pessoal e estreito do investigador com o fenómeno a investigar.

As aulas em que foram realizadas as actividades de investigação aconteceram em Abril e Maio do ano lectivo 2008/2009. Tal como se considera apropriado na metodologia do estudo de caso o papel do investigador (o professor da turma nesse caso) foi determinante na recolha de dados. Os métodos utilizados foram a observação, a gravação áudio e vídeo e a análise documental. Por outro lado foram utilizados três tipos de instrumentos de registo: escrito, áudio e vídeo. As actividades realizadas foram

recolhidas de documentos elaborados pela equipa do projecto “Explorar e Investigar para Aprender Matemática”<sup>1</sup>.

### **Gravação áudio e vídeo**

Muitas vezes não nos apercebemos que este tipo de recolha dos dados tem consequências no comportamento dos alunos e de certa forma pode constituir obstáculo a uma recolha naturalista. Contudo, notou-se que um longo período de contacto com os alunos, a relação estabelecida e a introdução gradual dessas formas de registo diminuem as perturbações possíveis e progressivamente constituem naturalmente parte da aula. Isto não só pelo facto de se introduzir formas de registo diferentes, mas também pela diferença que constituíam as tarefas que pretendíamos propor.

Considerou-se que se deveria tornar claro para os alunos o tipo de tarefas em que iriam estar envolvidos e preparou-se uma tarefa de preparação com a qual se pretendia estabelecer diálogo com os alunos e responder a dúvidas que pudessem surgir, mas também para os deixar mais à vontade com as tarefas a ser registadas em vídeo e áudio.

Durante a realização das duas actividades foi feito o registo vídeo e áudio num ambiente normal pois foram feitas tarefas de preparação para poder diminuir as consequências no comportamento dos alunos.

### **Análise documental**

A importância de analisar documentos está relacionada com o facto de estes serem produzidos habitualmente de forma independente dos propósitos da investigação, o que não acontece com as entrevistas e as observações. Yin (1989) refere que os documentos são uma fonte de recolha de dados, sobretudo importante porque permite corroborar ou confirmar a inferência sugerida por outras fontes de dados, daí a necessidade de ser usado em quase todo o tipo de estudos de caso.

Neste trabalho foram analisados essencialmente os documentos recolhidos após a realização das tarefas pelos alunos: relatórios sobre a exploração das tarefas de investigação propostas e documentos produzidos para apresentação das explorações aos restantes elementos da turma. Esporadicamente e sem carácter sistemático foram

---

<sup>1</sup> Este projecto desenvolveu-se no âmbito do Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

observados os registos dos alunos e outros trabalhos realizados nos livros e manuais utilizados, apenas como referenciais em relação aos documentos produzidos.

### **Análise de dados**

A recolha e análise de dados não corresponderam a fases distintas da investigação. De facto, procurou-se seguir a recomendação de vários autores de que, numa investigação qualitativa, elas devem estar intimamente ligados (Merriam, 1988; Yin, 1989; Erlandson et al., 1993).

Perante o material áudio e/ou visual impõe-se ao investigador a árdua tarefa de o passar a registo escrito. Reconhecendo-se que é impossível representar fidedignamente, em toda a sua extensão, a linguagem oral, a transcrição do discurso é também um acto que envolve interpretação. O significado é constituído de formas muito diversas, consoante o tipo de transcrição efectuada.

Os investigadores questionam-se sobre até que ponto deverão as transcrições ser detalhadas. Riessman (1993) levanta diversas questões que, apesar de poderem parecer banais, têm consequências no modo como a história é lida: “Dever-se-ia incluir silêncios, falsos começos, ênfases, formas não lexicais como 'hum', marcas discursivas como (...) 'portanto', discurso sobreposto e outros sinais de participação do ouvinte na narrativa?” (p. 12). Aconselha os seus alunos (principiantes de investigação) a começarem com uma transcrição tipo rascunho que contenha não só as palavras como também outras características do discurso (como risos, pausas,...) e, só mais tarde, a debruçarem-se sobre certas porções do texto e a retranscrevê-las para posterior análise.

A análise de dados foi feita tendo presente a questão em estudo: o modo como os alunos abordam e se envolvem nas actividades de exploração e investigação.

Primeiramente procedeu-se à transcrição integral das gravações áudio. Em seguida fez-se uma leitura cuidada de todo o material existente: transcrições das aulas, registos de observação, registos escritos dos alunos nas fichas e procedeu-se ao visionamento dos vídeos, com o fim de ter uma visão global do conteúdo do material existente e delinear uma linha de actuação.

Os registos feitos sobre as aulas e os trabalhos produzidos pelos alunos bem como o visionamento dos vídeos complementaram a análise feita que permitiu dar resposta à questão do estudo: o modo como os alunos abordaram e se envolveram nas

explorações e investigações e o que estas permitem revelar sobre os seus conhecimentos e capacidades.

## **Capítulo IV**

### **Actividades de Investigação: uma experiência com os alunos de uma turma do 8º Ano do Liceu Amílcar Cabral – Assomada.**

#### **Organização da turma e a realização das tarefas**

Face às características da actividade que se queria que os alunos desenvolvessem e perante o número de alunos da turma, decidimos organizar a turma em quatro grupos; dois grupos de 5 alunos e dois grupos de seis alunos cada, uma vez que, a turma é composta por 22 (vinte e dois) alunos e sendo um número reduzido de grupos permitiu maior interacção professor - grupos. Cada um dos grupos tinha um número semelhante de rapazes e raparigas, com a excepção de um que era composto apenas por rapazes. Esta distribuição de alunos por grupo não se alterou durante a realização das aulas com investigação.

#### **Introdução das tarefas**

Os alunos e o professor estavam pouco familiarizados com aulas que privilegiam a realização de investigação matemática. Por isso, tratando-se da primeira vez que eram propostas questões desta natureza, o professor procurou, a propósito da palavra “conjectura” elucidar aos alunos o seu significado. O professor explicou aos alunos logo no início o que se esperava deles. A expectativa criada foi a de que iriam “descobrir coisas sobre potências”, trabalhando como os matemáticos. Nessa fase o professor levou cerca de 10 minutos para fazer a apresentação oral da tarefa apesar de tê-la apresentado aos grupos por escrito. Como esses alunos são inexperientes nesse tipo de actividades, o professor orientou-os no sentido de arranjarem no grupo um porta-voz e este só lhe iria chamar, se ninguém no grupo conseguisse esclarecer a dúvida. Também foi-lhes dito que seria vantajoso escolher um secretário para registar as conclusões a que o grupo ia

chegando. Os alunos acataram a ideia e realmente foi bastante vantajoso. Era notório a satisfação dos “pequenos investigadores” e inclusive um grupo sugeriu que o seu nome fosse “Os investigadores do 8ºA18” já que estudam na referida turma. Já em relação à segunda actividade, a introdução foi relativamente mais curta, pois os alunos já tinham algumas ideias vindas da primeira actividade. Contudo, o professor apresentou a tarefa à turma e fez algumas considerações que considerou serem importantes para o início dessa actividade.

### Desenvolvimento

A atitude geral da turma foi de grande interesse e empenho. No início, provavelmente, o seu interesse advinha da motivação criada pelo professor, mas à medida que se embrenhavam na tarefa era esta que o sustentava. O interesse era bem visível perante o entusiasmo com que os alunos chamavam o professor sempre que faziam uma nova descoberta. Por outro lado, verificou-se que, no geral, não solicitavam a sua presença para validar o seu trabalho. O professor foi circulando pelos grupos com o propósito de verificar as dificuldades que surgiam e incentivar os alunos a trabalhar tentando, contudo não direccionar mais do que aquilo que a ficha já fazia. O episódio seguinte ocorrido no grupo D entre os alunos e o professor pode ilustrar esse facto:

Samuel: *Professor, o que é para fazer nessa primeira questão?*

Professor: *O que se pede nessa questão?*

Samuel: *Para escrever esses números como uma potência de base 2.*

Professor: *E então? Qual a tua dúvida agora?*

Jocelina: *Para todos esses casos?*

Professor: *Pois.*

Vander: *Professor e se não for possível.*

Professor: *Analise bem e registem o que acharem, (afastando-se do grupo).*

O nível de envolvimento foi grande, tendo-se registado, no geral, uma boa dinâmica nos grupos e bastante coesão no seio do mesmo. Pelas características das questões houve bastante discussão no seio dos grupos. Os alunos corrigiam-se mutuamente e argumentavam para defenderem as suas ideias perante os seus colegas.



Em algumas situações em que os grupos não chegavam a acordo, o professor funcionou como orientador.

A calculadora elementar foi um elemento facilitador e foi feita um bom uso dela tanto na primeira como na segunda actividade. Passaremos em seguida a dar uma ideia geral do conteúdo do trabalho dos alunos.

Relativamente à primeira questão da primeira actividade (regularidades nas potências), que acabou por acontecer em meados de Abril, desenvolveu-se durante uma aula de duas horas, como previsto, sendo o último quarto da aula, dedicado à apresentação e discussão dos trabalhos. As conjecturas apresentadas sobre as potências de base 2 e de base 3 foram do mesmo tipo. A maioria dos grupos indicou que as primeiras originavam sempre um número par e as segundas um número ímpar. Pela impossibilidade de representarem 200 e 1000 como potência de base 2, alguns alunos referiram também que “os números que acabam em zero não podem ser escritos como uma potência de base 2” e até arranjaram mais exemplos de números que terminam em zero para os ajudar a formular essa conjectura. Logo nesta questão se observou como a ideia de conjectura já fazia sentido para alguns alunos.

Em relação à segunda questão, ainda na primeira actividade, tiveram inicialmente o problema de interpretação do texto, pelo que o professor teve que ler e esclarecer, para que pudessem realmente iniciar essa actividade. Por isso, consideramos que foi aquela em que os alunos ficaram mais aquém do que se foi pedido. Apenas escreveram o cubo de 4, de 5 e de 6 como soma de números ímpares. Alguns alunos conseguiram exprimir essa soma utilizando números ímpares consecutivos; contudo, três dos quatro grupos conjecturaram que o cubo de qualquer número podia ser escrito como a soma de números ímpares.” *Parece-nos que isso é sempre possível porque já experimentámos alguns e conseguimos, parece que é sempre assim...*” o outro grupo disse que os exemplos que tinham nada os levava a concluir.

Em relação à segunda actividade intitulada “Divisões por 11, 111...” que foi realizada em meados de Maio levou duas aulas de 50 minutos cada, aulas essas ministradas não no mesmo dia, mas na mesma semana. A primeira aula foi ocupada com a realização da tarefa e na primeira parte da segunda aula os alunos puderam concluir a tarefa. Já a segunda metade da segunda aula foi dedicada ao confronto de ideias entre os grupos no que diz respeito às conclusões obtidas.

Era evidente o entusiasmo dos alunos por realizarem a segunda tarefa de exploração/investigação. Tinham realizado uma tarefa deste tipo no mês anterior, “Regularidades nas Potências”, e gostaram bastante. O professor lembrou aos alunos, com base na experiência então efectuada, o que se pretendia. Falou do significado de regularidades, padrões e conjecturas. Fez referência, também, quanto à necessidade de fazer um registo escrito pormenorizado do trabalho efectuado pelo grupo para que no final da actividade fosse possível confrontar, na turma, as diferentes descobertas, conjecturas e justificações.

Os alunos encontravam-se organizados em grupos conforme lhes tinha sido pedido. A tarefa “Divisão por 11, 111...”, foi apresentada por escrito e distribuída aos alunos. Foi lida em voz alta pelo professor que, paralelamente, foi questionando a turma de modo a minorar eventuais dificuldades de interpretação do texto ou de utilização de conceitos, de que eventualmente podiam estar um pouco esquecidos ou mal interiorizados por alguns alunos, como, por exemplo, os conceitos de dízima e período.

Os grupos embrenharam-se com entusiasmo no trabalho. A primeira questão revelou-se-lhes fácil e com o auxílio da calculadora rapidamente todos os grupos resolveram-na. As respostas eram idênticas, *dízima infinita periódica*, mostrando ser apenas preocupação dos alunos dar resposta à questão colocada. Houve pois, a necessidade de incentivar os alunos a fazerem uma observação mais cuidada e lembrar-lhes que as questões colocadas eram apenas orientações e não perguntas fechadas com uma resposta única e que eles tinham que dar liberdade ao seu espírito investigativo.

Inicialmente, um elemento de um dos grupos reclamou que essa actividade dá muito trabalho, mas nem foi preciso a intervenção do professor pois, os outros elementos do grupo esclareceram-no e mostraram-no que para a realização da tarefa basta usar uma calculadora e, a partir daí, tirar as conclusões em função dos resultados. A partir daí começou a surgir conclusões como:

*O período é de dois algarismos;*

*Obtemos o período com os números iguais dois a dois;*

*Nessas fracções nós descobrimos que há um padrão: um número par, um número ímpar, um número par, um número ímpar... ou vice-versa. Parece concentrarem-se mais na questão do número de algarismos que tem o período para cada caso, pois conseguiram sem dificuldade indicar o número de algarismos que tem o período para os casos de denominador 11, 111 e 1111.*

A discussão veio a revelar-se bastante positiva, servindo vários fins: pôr em confronto o trabalho desenvolvido pelos grupos; realçar os aspectos considerados mais importantes; levar os alunos, que tiveram dificuldades na realização da tarefa a perceber o que se pretende com este tipo de actividade; clarificar alguns registos feitos pelos alunos; e dar coesão a todo o trabalho realizado.

Na apresentação das conclusões a que cada grupo chegou, os outros alunos estiveram com muita atenção em todos os detalhes para que, logo a seguir, levantassem questões se eventualmente tivessem que o fazer.

### Interacção entre elementos do grupo

A interacção entre os elementos do grupo foi bastante satisfatória e, em casos pontuais, era chamado o professor. Estas actividades são indicadas de acordo com a fonte donde foi retirada e adaptada, para os alunos do 7º ou 8º ano, cada um com o seu grau de aprofundamento. Contudo, por exemplo, apesar de o tema potências ser leccionado no 7º ano, muitos alunos não se lembraram de imediato e mostraram inicialmente confusão em identificar base e expoente e até mesmo em calcular o valor de uma potência. Essa questão foi gerida e solucionada nos grupos contando às vezes com a orientação do professor. Vejamos o episódio seguinte em que o grupo A pretendia escrever o número 64 como uma potência de base 2:

Eridson: É  $2^{32}$ .

Jenilton:  $2^{32}$  não pode ser porque  $2^{32}$  é  $2 \times 2 \times 2 \dots 2$ , (32 vezes). Isso não dá 64.

Eridson:  $2^{32}$  é  $2 \times 32$ . É Claro que dá 64.

Jenilton:  $2^{32}$  é 2, 32 vezes e isso passa de longe 64.

Eridson: Professor, o grupo acha que isso aqui (  $2^{32}$  ) é  $2 \times 2 \times 2 \dots 2$ , (32 vezes).

Professor: Nessa potência (  $2^{32}$  ) qual a base?

Etson: A base é 2

Professor: E qual o expoente?

Etson: O expoente é 32.

Professor: *O expoente significa o quê?*

Alunos: *O número de vezes que a base se repete.*

Professor: *E então Eridson, aqui escrevemos o número 2 quantas vezes?*

Eridson: *32 é claro.*

Jenilton: *Já tinha dito.*

Eridson: *Já me lembrei, tens razão Jenilton; então é o  $2^6$  que é  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$  que é igual a 64.*

É notório neste episódio o papel do professor em orientar a discussão e a direccioná-la no sentido de os alunos tirarem as suas próprias conclusões. Poucas foram as vezes que o professor teve que interagir com a turma no seu todo. Á dada altura teve que chamar atenção à turma no sentido de registarem todas as conclusões a que iam chegando.

### **Interacção professor – grupos**

Durante a realização das aulas com actividades de investigação, o professor percorreu várias vezes os grupos: nalguns casos, a pedido do porta-voz; noutros, para ver o andamento dos trabalhos e o empenhamento dos elementos do grupo. Na maioria das vezes o ritmo de trabalho era muito bom, já que os alunos estavam, praticamente, todos empenhados e curiosos, com vontade de fazer descobertas. Eram uns a conjecturar, outros a argumentar sobre as conjecturas para verem se valia ou não a pena levar determinada conjectura adiante. Era esse normalmente o clima entre os elementos de cada grupo. O professor servia de moderador dessa discussão sempre que se apercebia disso ou que era solicitado pelo porta-voz. O professor nas suas intervenções tentou, através de questões direccionadas ao grupo ou a elemento do grupo, fazer com que eles mesmos chegassem a determinadas conclusões ou refutassem determinadas conjecturas e avançassem para uma outra. Vejamos o que aconteceu no grupo C quando o porta-voz do grupo chamou o professor:

Héder: *Professor, dúvidas aqui no nosso grupo.*

Professor: *Sim, diz lá.*

Héder: *Estamos com problemas nesta questão 2; temos que:*

$1^3 = 1$ ;  $2^3 = 8$ ;  $3^3 = 27$ ;  $4^3 = 64$ ;  $5^3 = 125$ ;  $6^3 = 216$ ;  $7^3 = 343$ ;  $8^3 = 512$ ;  $9^3 = 729$ ;  $10^3 = 1000$ ;  $11^3 = 1331$  e não entendemos o que se pede.

Professor: *Qual o valor da potência  $1^3$  ?*

Héder: *É um.*

Professor: *E foi escrito como soma de quantos números ímpares?*

Alunos: *Um único número, é claro.*

Professor: *E o valor da potência  $2^3$  ?*

Alunos: *É 8.*

Professor: *E o 8 foi escrito como soma de quantos números ímpares?*

Maura: *Professor, dois números ímpares, está na ficha.*

Professor: *Certo. E a potência  $3^3$ , qual o seu valor?*

Gilene: *Professor, é  $3 \times 3 \times 3$  e portanto 27.*

Professor: *E foi escrito como soma de quantos números ímpares?*

Héder: *Três números ímpares.*

Héder: *Professor, já percebi. É para ver se o resto também é possível fazer isso.*

Professor: *Fazer isso como?*

Héder: *(Risos), se  $4^3$  podemos escrever como soma de 4 números ímpares; se  $5^3$  podemos escrever como soma de 5 números ímpares e assim por diante para todos os números.*

Professor: *Todos perceberam?*

Alunos: *Sim professor. Já percebemos e vamos analisar isso.*

Professor: *Então vamos a isso (afastando-se do grupo).*

### Discussão

Como finalização destas actividades, depois de todos os grupos terem terminado a tarefa, o professor pediu que cada grupo indicasse as suas descobertas. Os restantes alunos ouviram com muita atenção, verificando imediatamente com a sua calculadora todos os resultados a que eles próprios não tinham chegado. No entanto as conjecturas praticamente não divergiram, talvez apenas na forma de as apresentar. Muitas vezes foram levantadas questões que mostram claramente que a realização dessas tarefas contribuiu e de que maneira para aquisição ou aperfeiçoamento de conhecimentos.

Uns alunos estavam muito atentos em questões de linguagem, rigor matemático e por isso levantaram questões e outros a defenderem a sua ideia mostrando que

realmente empenharam muito para fazer determinada conjectura. Contudo no final o ambiente era de muita satisfação tanto por parte dos alunos por terem trabalhado e descobrido muitas coisas, como por parte do professor por notar que proporcionou bons momentos de trabalho tanto para si como para os alunos.

### **Conclusões da realização das tarefas**

Fixamos como objectivos específicos: (a) levar os alunos a realizarem actividades de investigação na aula de matemática; (b) inteirar do empenho e do interesse que os alunos têm em tais actividades; (c) criar espaço e oportunidade para realização e discussão das mesmas. Para cumprir esses objectivos realizamos actividades de investigação numa turma do 8º ano (8º A 18) no Liceu Amílcar Cabral em Assomada ao qual descrevemos resumidamente a avaliação que fizemos da realização dessas actividades.

Durante a primeira parte da realização da primeira tarefa, foi notória a concepção dos alunos de que uma questão apenas tem uma resposta e que encontrada esta, o trabalho está concluído. Os alunos paravam de trabalhar mal lhes parecia terem encontrado uma resposta para cada questão. Outra concepção dos alunos que se evidenciou bastante foi a de que uma resposta ou está certa ou está errada e que é ao professor que compete validá-la. O professor foi frequentemente chamado para verificar se o que haviam feito estava correcto ou não. Também se verificou, principalmente durante a realização da segunda tarefa ("divisões por 11, 111, ..."), devido talvez à sua estrutura bastante orientada, que os alunos usavam estritamente os dados indicados revelando por isso alguma dificuldade em avançar nas investigações.

Apesar dos alunos se revelarem entusiasmados e empenhados na realização das tarefas desde o início, era evidente nem sempre ser para eles muito claro o que se pretendia com este tipo de actividade. O apoio prestado pelo professor bem como os momentos de discussão foram essenciais para levar os alunos a perceber o que era efectivamente investigar.

Os alunos, foram ao longo da realização das tarefas melhorando a sua capacidade de observar, conjecturar, testar, justificar, argumentar, mostrando criatividade. Na segunda tarefa ("divisões por 11, 111, ...") os alunos revelavam já um certo espírito investigativo. Formulavam de forma autónoma as suas conjecturas,

validavam-nas testando vários exemplos, revelavam persistência na procura de um novo caminho quando um contra-exemplo deitava abaixo a sua conjectura.

Também as discussões, numa primeira fase bastante orientadas pelo professor, foram gradualmente perdendo esse carácter. Os alunos melhoraram a sua capacidade de comunicar matematicamente assumindo a argumentação um lugar de destaque.

Foi ainda possível perceber, durante a realização das tarefas, a noção que os alunos tinham de alguns conceitos anteriormente leccionados nomeadamente, potências, fracções, dízimas, números primos, divisores, múltiplos e da utilização da calculadora.

Em síntese, os alunos manifestaram no geral ter aderido com entusiasmo à realização das tarefas de exploração e investigação propostas, manifestando algumas alterações nas suas concepções e no seu desempenho. Um dos objectivos deste trabalho é analisar a interacção e o interesse dos alunos em aulas com actividades de investigação matemática, diante disso como já referido os alunos mostraram-se bastante interessados e interagiram de forma positiva tanto com os colegas de grupo de trabalho como com a turma no seu todo, principalmente no momento de discussão dos trabalhos realizados. Interagiram da mesma forma com o professor durante o decorrer de toda actividade. Por tudo isso acreditamos ter atingido cabalmente os objectivos da realização deste trabalho.

## **Considerações finais**

Indicamos, neste trabalho, as razões que justificam a realização de trabalho investigativo na aula de Matemática, bem como os principais aspectos de que esse trabalho se pode revestir. Muitas das ideias apresentadas terão de ser objecto de mais experimentação e investigação. Mas uma coisa parece ser certa: A realização de trabalho de cunho investigativo constitui uma experiência tão fundamental para a aprendizagem matemática do aluno como para o desenvolvimento profissional do professor. Continuar a procurar respostas para essas questões, na formação inicial, com professores em serviço, junto de alunos dos diversos níveis de ensino, constitui um desafio extremamente aliciante e extremamente importante para toda a comunidade de educação matemática.

## Sugestões e recomendações

As recomendações aqui enunciadas e que se dirigem aos responsáveis pelo currículo, aos investigadores e aos professores em geral, têm como principal finalidade abrir espaço para a reflexão.

Se se aceitar que as actividades de exploração e investigação podem proporcionar a todos os alunos momentos de verdadeira actividade matemática e que esta contribui para a criação de uma visão mais verdadeira desta ciência e do seu ensino e aprendizagem, então, é pertinente pensar a sua inclusão no currículo. Um elemento fundamental para esta inclusão é o próprio professor. Este não deve assumir o currículo como prescritivo, mas como um quadro de referência que pode ser influenciado de acordo com as reflexões que faz da sua prática pedagógica, nomeadamente de experiências inovadoras. Nesta perspectiva os programas em vigor parecem ter a amplitude suficiente para permitir a introdução das actividades de exploração e investigação nas aulas de Matemática.

Um outro aspecto basilar, e que se prende com o anterior, é o da formação de professores. Ao se pretender introduzir a nível curricular as actividades de exploração e investigação temos que pensar a formação inicial e a formação contínua dos professores. À semelhança do que a investigação tem revelado como positivo sobre a resolução de problemas, os futuros professores devem ser sujeitos à realização de tarefas de investigação ao longo do curso de forma a adquirirem o verdadeiro sentido destas, ao mesmo tempo que são levados a questionar as suas concepções da Matemática como ciência e da Matemática escolar. No que se refere à formação contínua, para além de serem proporcionadas, nos cursos de formação, actividades investigativas, os professores devem ser levados a promover estas nas suas aulas e assim poderem observar e reflectir sobre o desempenho dos seus alunos neste tipo de actividade.

Também é de salientar o importante papel que os autores de livros de textos podem vir a desempenhar nesta área, introduzindo propostas de tarefas investigativas nos manuais escolares que sirvam de orientação aos professores.

As actividades de investigação, devido às suas características, requerem preferencialmente uma metodologia de trabalho em grupo. É, pois, aconselhável que se



proceda a investigações em que a unidade de análise seja o grupo de trabalho de forma a melhor se poderem analisar as interacções existentes e o seu contributo a nível do desempenho global do grupo. Há também que pensar e investigar qual o papel do trabalho individual nas investigações matemáticas.

Em virtude de ter sido, para mim, gratificante, como professor, esta experiência com os meus alunos, o que de algum modo penso estar reflectido no capítulo IV “actividades de investigação: uma experiência com os alunos de uma turma do 8º ano do liceu Amílcar Cabral - Assomada ”, espero sinceramente que este estudo sirva também de incentivo para que muitos professores experimentem proporcionar aos seus alunos actividades de exploração e investigação, contribuindo com as suas experiências e reflexões para um melhor conhecimento das potencialidades educativas deste tipo de actividade matemática.

## Referências Bibliográficas

- Abrantes, P., Leal, L., & Ponte, P.** (org.) (1996). *Investigar para Aprender Matemática: textos seleccionados*. Lisboa: Projecto “Matemática para Todos” & Associação de Professores de Matemática.
- Abrantes, P.** (1994). O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: A experiência do projecto MAT789 (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Abrantes, P., Leal, L., & Ponte J.** (org.). *Investigar para Aprender Matemática*. Lisboa: Projecto Matemática para Todos & APM. Tradução do último capítulo de *The Philosophy of Mathematics Education*, The Falmer Press, 1991.
- Bishop, A. J., & Goffree, F.** (1986). Classroom Organization and Dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson e M. Otte (Orgs.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel (Tradução de José Manuel Varandas, Hélia Oliveira e João Pedro da Ponte).
- Bogdan, R., & Biklen, S.** (1982). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Borasi, R.** (1991). *Learning mathematics through inquiry*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Chapman, O.** (1997). Metaphors in the teaching of mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 32(3), 201-228.
- Christiansen, B., & Walther, G.** (1986). Task and Activity, in B. Christiansen, A. G. Howson e M. Otte (eds.), *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: D. Reidel.
- Davis, P. J., & Hersh, R.** (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.
- Editores, L., & Ponte, J. P.** (Orgs.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 139-162). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Erlandson, D. A., et al.** (1993). *Doing naturalistic inquiry*. Newbury Park: Sage Publications.
- Ernest, P.** (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: The Falmer Press.

- Ernest, P.** (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In P. Abrantes, L. Cunha Leal e J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática: Textos seleccionados* (pp. 25-47). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e Associação de Professores de Matemática.
- Frank, M.** (1988). Problem solving and mathematics Beliefs. *Arithmetic teacher* 35, 32-34.
- Garofalo, J.** (1989). Beliefs and their influence on mathematical performance. *Mathematics Teacher*, 82 (7), 502-505.
- Gimeno-Sacristán, J.** (1989). *El Curriculum: una Reflexión sobre la Práctica*. Madrid: Morata.
- Hadamard, J.** (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Jorgensen, D. L.** (1989). *Participant observation: A methodology for human studies*. Newbury Park: Sage Publications.
- Ludke, M., & André, M.** (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.
- Mason, J., Burton, L. e Stacey, K.** (1992). *Thinking mathematically*. London: Addison-Wesley.
- Mason, J.** (1996). Resolução de problemas matemáticos no Reino Unido: Problemas abertos, fechados, e exploratórios. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 73-88). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Merriam, S.** (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. S. Francisco: Jossey-Bass Publishers.
- National Council of Teacher of Mathematics** (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.
- National Council of Teachers of Mathematics** (1994). *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE. (Tradução portuguesa da edição original de 1991).
- Oliveira, H.** (1998) *Actividades de investigação na aula de matemática aspectos da prática do professor* (tese de mestrado: Univesidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Olson, J.** (1992). *Understanding Teaching: Beyond Expertise*. Milton Keynes: Open University Press.

- Patton, M. Q.** (1987). *How to use qualitative methods in evaluation*. Newbury Park: Sage Publications.
- Pirie, S.** (1987). *Mathematical investigations in your classrooms - a pack for teachers*. University of Oxford & University of Warwick.
- Ponte, J. P., et al.** (1999). *A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas*. Lisboa: APM.
- Ponte, J. P., et al.** (1998c). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, 7 (2), 41-70.
- Pólya, G.** (1957). *How to solve it* (2nd ed.) New York: Doubleday.
- Pólya, G.** (1962/81). *Mathematical discovery* (3ª edição, combinada). New York: John Wiley.
- Resnick, L.** (1987). *Education and learning to think*. Washington, DC: National Academy Press (pp. 44-51).
- Riessman, C. K.** (1993). *Narrative Analysis*. Newbury Park: Sage Publications
- Schoenfeld, A.** (1991). What's all the fuss about problem solving? *ZDM*, 1, 4-8.
- Schoenfeld, A.** (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Silver, E.** (1996). Acerca da formulação de problemas de matemática. In P. Abrantes, L. Leal e J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 139- 162). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Singh, S.** (1998). *A solução do último teorema de Fermat*. Lisboa: Relógio d'Água
- Stewart, I.** (1995). *Os problemas da matemática*. Lisboa: Gradiva.
- Wood, T.** (1996). Events in Learning Mathematics: Insights from Research in Classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 30(1), 85-105.
- Yin, R. K.** (1989). *Case study research: Design and methods*. Newbury Park: Sage Publications.

## **ANEXOS**

## Anexo 1

### REGULARIDADES NAS POTÊNCIAS

- 1- O número 729 pode ser escrito como uma potência de base 3. Para o verificar basta escrever uma tabela com as sucessivas potências de 3:

$$3^2 = 9$$

$$3^3 = 27$$

$$3^4 = 81$$

$$3^5 = 243$$

$$3^6 = 729$$

- Procura escrever como uma potência de 2

$$64 =$$

$$128 =$$

$$200 =$$

$$256 =$$

$$1000 =$$

- Que conjecturas podes fazer acerca dos números que podem ser escritos como potências de base 2? E como potências de base 3?

- 2- Repara que os cubos dos primeiros números naturais obedecem às seguintes relações:

$$1^3 = 1$$

$$2^3 = 1 + 5$$

$$3^3 = 1 + 5 + 9$$

- Nota que, no exemplo acima,  $1^3$  foi escrito como uma “soma” com *um* único número ímpar,  $2^3$  como a soma de dois números ímpares e  $3^3$  como a soma de três números ímpares. Será que o cubo de qualquer número pode ser escrito como a soma de números ímpares?

**Anexo 2****DIVISÕES POR 11, 111 ...**

1- Determina o período das dízimas representadas pelas fracções:

$$\frac{3}{11} \quad \frac{9}{11} \quad \frac{18}{11} \quad \frac{47}{11} \quad \frac{52}{11} \quad \frac{125}{11}$$

- Que tipo de dízima se obtém quando dividimos um número inteiro por 11?
- Será possível, sem efectuar a divisão, indicar o período da dízima correspondente a qualquer fracção de denominador 11?

2- Experimenta agora divisões por 111. Apresenta os resultados.

3- Podes ainda investigar o que se passa nas divisões por 1111...

This document was created with Win2PDF available at <http://www.daneprairie.com>.  
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.